中国人民大学应用经济学院

博士研究生综合考试样题

（高级宏观经济学）

授课教师：安子栋

参考书目：[1] Romer, David. Advanced Macroeconomics, 5th ed. McGraw-Hill/Irwin, 2019.

[2] Krugman, Paul R., Maurice Obstfeld, and Marc J. Melitz, International Economics: Theory and Policy, 10th ed. Pearson, 2015.

1. **索洛增长模型**：考虑生产函数 $Y = F(K, AL)$ 规模报酬不变，资本折旧率 δ 保持不变。假设劳动与资本分别按其边际产出支付报酬。

(a) 分别计算劳动与资本的边际产出。

(b) 证明总净产出等于生产要素总收入。

(c) 假定资本收益 r 保持不变，分别计算 w 和 r 的增长率。

(d) 考虑我国经济发展初期，k 低于但逐步向平衡发展路径下的人均资本 k^* 收敛。w 与 r 的增长率会高于还是低于其在平衡发展路径下的增长率?

2. **拉姆齐模型**：考虑柯布道格拉斯生产函数 $Y(t) = A(t)K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}$，$g = \dot{A}/A$ 保持不变，$n = \dot{L}/L$ 保持不变。家庭效用方面，假定相对风险规避系数 $\theta = \alpha$，效用的折现率为 ρ。给定条件当 $\dot{c} = 0$ 时，$f'(k) = \rho + \theta g$。给定条件 $\dot{k} = k^\alpha - c - (n+g)k$，且当 $\dot{k} = 0$ 时，$c^* = f(k) - (n+g)k$。

(a) 计算 k^*，平衡增长路径上的 k。

(b) 计算 c^*，平衡增长路径上的 c。

(c) 给定 $z(t) \equiv k(t)/y(t)$ 为资本产出比，$x(t) \equiv c(t)/k(t)$ 为消费资本比。用 z 和 x 及模型参数表示 $\dot{z}(t)$ 和 $\dot{x}(t)/x(t)$。

3. **内生增长两部门模型**：假设经济中存在农业和工业两个部门，并且有资本和土地两个生产要素。资本可以用于两个部门且自由流动；而土地只能用于农产品生产。农业部门生产函数为 $C(t) = K_C(t)^\alpha T^{1-\alpha}$，工业部门生产函数为 $K(t) = BK_K(t)$。以上生产函数中，K_C 和 K_K 分别是两个部门所用成本，$T = 1$ 代表标准化土地，另外 $0 < \alpha < 1$，$B > 0$。资本和土地按各自边际产出收取报酬。

(a) 以 $P_K(t)$ 表示时刻 t 工业品对农业品的相对价格。推导 $P_K(t)$，$K_C(t)$ 及其增长率与参数

α、B 的关系。

(b) 给定农产品增长率为 $g_C = (B + g_P - \rho)/\theta$，实际利率为 $B + g_P(t)$，计算 K_C 的增长率。

(c) 现在考虑政府开始向工业投资征税，税率为 τ。计算税率对消费均衡增长率的影响。

4. **由教育导致的跨国收入差距**：考虑生产函数 $Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$，其中 $A = e^{\beta E}$ 由受教育程度 E 决定，$0 < \alpha < 1$。假设资本自由流动，并且总是调节到使资本的边际产出等于世界资本回报率 r^* 的水平。

(a) 计算资本的边际产出。

(b) 以题中变量和参数表示 K。

(c) 计算教育程度对经济增长的影响 $\partial(lnY)/\partial E$。

5. **RBC，利率对消费决策的影响**：考虑经济个体二阶段效用函数 $U = lnC_1 + lnC_2$。

(a) 假设经济个体在第一期收入为 Y_1，第二期为零。第一期的消费为 C_1，第二期的消费为 $(1+r)(Y_1 - C_1)$。面对确定的利率 r，计算经济个体决策 C_1 时的一阶条件。

(b) 假设利率由确定变为随机，但经济个体对利率的期望值 r^E 不变，C_1 会如何变化?

(c) 假设经济个体第一期收入为零，第二期为Y_2。第一期靠贷款消费 C_1，第二期消费为 $Y_2 - (1+r)C_1$。 Y_2 是确定的，但 r 可能是随机的。计算经济个体决策 C_1 时的一阶条件。

(d) 如果 r 由确定变为随机，但 r^E 不变，C_1 会如何变化?

6. **泰勒模型**：假设在泰勒模型中，每隔一期所有厂商制定当期和下期的价格计划。需求曲线为 $y_t = m_t - p_t$，其中 m 与 p 分别为名义GDP和价格的对数。给定厂商根据 $x_i = (p^*_{it} + E_t p_{i,t+1^*})/2$ 制定价格计划，并且 $p^*_{it} = \phi m_t + (1-\phi)p_t$。假设名义GDP的对数函数符合随机游走。

(a) 以 m_t、$E_t m_{t+1}$、p_t、$E_t P_{t+1}$ 表示厂商在 t 期的价格计划 x_t。

(b) 利用同步定价求解 x_t。

(c) 计算 y_t 和 y_{t+1}。

7. **生命周期储蓄理论**：考虑一个生活在 $0 - T$ 时间的经济个体，其终生效用为 $U = \int_{t=0}^{T} u(C(t))dt$，$u't > 0$，$u'' < 0$。该个体在 $0 \le t < R$ 区间收入为 $Y_0 + gt$，在区间 $R \le t \le T$ 区间收入为0。此外，利率为零，初始财富为零，无不确定性。

(a) 终生预算约束是什么?

(b) 效用最大化的消费路径是什么?

(c) 财富路径是什么?

8. **投资决策**：考虑厂商生产函数 $Y=K^{\alpha}L^{1-\alpha}$，$0<\alpha<1$，K 和 L 分别为资本和劳动力。假设短期内价格不变，厂商把自己产品的价格 P 和产量 Y 看作是既定的。假设生产要素市场是完全竞争的，厂商把工资 W 和 资本租赁价格 r 看作是既定的。

(a) 给定 P, Y, W 和 K，厂商选择的 L 是多少?

(b) 给定厂商选择的 L，厂商的利润是多少?

(c) 计算厂商最大化利润选择的 K。

9. **货币政策不可能三角**：解释什么是货币政策不可能三角，并对每种可能性举出实例。

10. **财政政策的稳定性**：根据定义，预算赤字等于债务余额的变化率 $\delta(t) \equiv \dot{D}(t)$。令 $d(t)=D(t)/Y(t)$ 表示债务对产出的比例。假设 $Y(t)$ 的增长率固定为 $g>0$。

(a) 假设赤字产出比为常数 $\delta(t)/Y(t)=a>0$，用 a、g 和 $d(t)$ 表示 $\dot{d}(t)$

(b) 2018年美国年预算赤字7790亿美元，累计债务余额22万亿，国民生产总值20万亿美元，同比增长2.9%。分析其财政政策是否稳定。

(c) 假设基本赤字对产出的比率为常数且等于 a。在时刻 t 的总赤字为 $\delta(t)=aY(t)+r(t)D(t)$，其中 $r(t)$ 为时刻 t 的利率。假设 r 是赤字产出比的增函数，$r(t)=r(d(t))$，$r'(\cdot)>0$，$r''(\cdot)>0$，$lim_{d\to-\infty}r(d)<g$，$lim_{d\to\infty}r(d)>g$。用 a、g 和 $d(t)$ 表示 $\dot{D}(t)$。

参考答案

1.索洛增长模型

(a) 由于规模报酬不变，生产函数可以改写为紧凑形式

$Y = AL \cdot F(K/AL, 1) = AL \cdot f(k)$，其中 $k \equiv K/AL$ 为人均资本。

生产函数对劳动求偏导可得劳动边际产出为

$$w \equiv \partial Y/\partial L = ALf'(k)(-K/AL^2) + Af(k) = A[(-K/AL)f'(k) + f(k)] = A[f(k) - kf'(k)]$$

净产出对资本求偏导可得资本边际产出为

$$r \equiv \partial(Y - \delta K)/\partial K = ALf'(k)(1/AL) - \delta = f'(k) - \delta$$

(b) 由(a)得知，生产要素总收入为

$$wL + rK = A[f(k) - kf'(k)] \cdot L + [f'(k) - \delta] \cdot K = A[f(k) - kf'(k)]L + f'(k)kAL - \delta K$$

简化可得

$$wl + rk = AF(K, L) - \delta K$$

(c) 由(a)得知 $w = A[f(k) - kf'(k)]$。对时间求导并计算增长率可得

$$\frac{\dot{w}}{w} = \frac{\dot{A}}{A} = \frac{[f(k) \dot{-} kf'(k)]}{[f(k) - kf'(k)]} = g + \frac{f'(k)\dot{k} - \dot{k}f'(k) - kf''(k)\dot{k}}{f(k) - kf'(k)} = g + \frac{-kf''(k)\dot{k}}{f(k) - kf'(k)}$$

其中 $g \equiv \dot{A}/A$ 为技术增长率。在平衡增长路径上 $\dot{k} = 0$，因此 $\dot{w}/w = g$。

同样由(a)得知 $r = f'(k) - \delta$。由于在平衡增长路径上k不变，$f'(k)$同样不变。因此$\dot{r}/r = 0$。

(d) 由(c)得知

$$\frac{\dot{w}}{w} = g + \frac{-kf''(k)\dot{k}}{f(k) - kf'(k)}$$

由于 $f'(k) > 0$，$f''(k) < 0$，如果 $k < k^*$，$\dot{w}/w > g$

同样由(c)得知

$$\frac{\dot{r}}{r} = \frac{f''(k)\dot{k}}{f'(k)}$$

由于 $f'(k) > 0$，$f''(k) < 0$，且 $\dot{k} > 0$，$\dot{k}/k < 0$

2. 拉姆齐模型:

(a) 柯布道格拉斯函数可改写为

$$y(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = k(t)^{\alpha}$$

其中 $k(t) = K(t)/L(t)$ 为人均资本。在平衡增长路径上，$c = c^*$ 并且 $\dot{c} = 0$。利用题设条件可得

$$f'(k) = \alpha k^{(\alpha-1)} = \rho + \theta g$$

可得

$$k^* = (\frac{\alpha}{\rho + \theta g})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(b) 同样，在平衡增长路径上，$k = k^*$ 并且 $\dot{k} = 0$。利用题设条件可得

$$c^* = f(k) - (n+g)k = (\frac{\alpha}{\rho + \theta g})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - (n+g)(\frac{\alpha}{\rho + \theta g})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(c) 由 $y(t) = k(t)^{\alpha}$ 与 $z(t) \equiv k(t)/y(t)$ 可得

$$k = z^{1/(1-\alpha)} \Leftrightarrow z = k^{1-\alpha}$$

对时间求导可得

$$\dot{z} = (1-a)k^{-\alpha}\dot{k}$$

利用 $x(t) \equiv c(t)/k(t)$，可得 $xz = ck^{\alpha}$。由 $\dot{k} = k^{\alpha} - c - (n+g)k$ 可得

$$\dot{z} = (1-\alpha)k^{-\alpha}[k^{\alpha} - c - (n+g)k] = (1-\alpha)[1 - (x+n+g)z]$$

接下来，$x = c/k$ 对时间求导可得

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\alpha k^{\alpha-1} - \rho - \theta g}{\theta} + \frac{c + (n+g)k - k^{\alpha}}{k} = x + n - \frac{\rho}{\alpha}$$

3. **内生增长两部门模型**

(a) 资本在工业部门的边际产出为 $\partial K/\partial K_K = B$，在农业部门的边际产出为 $\partial C/\partial K_C = \alpha K_C^{\alpha-1}$。由于资本可以自由流动，资本在两部门间应有相同的报酬：

$$P_K(t)B = \alpha K_C(t)^{\alpha-1}$$

方程两侧分别对时间求导可以得到相对价格的增长率

$$\frac{\dot{P}_K(t)}{P_K(t)} = (\alpha-1)\frac{\dot{K}_C(t)}{K_C(t)}$$

资本价格的增长率取决于资本增长率以及资本产出弹性。

(b) 农产品生产函数对时间求导并计算增长率

$$g_C(t) = \dot{C}(t)/C(t) = \alpha[\dot{K}_C(t)/K_C(t)] = \alpha g_K(t)$$

由 $g_C = (B + g_P - \rho)\theta$ 可得

$$[B + (\alpha-1)g_K(t) - \rho]/\theta = \alpha[\dot{K}_C(t)/K_C(t)] = \alpha g_K(t)$$

$$\Rightarrow g_K(t) = (B-\rho)/[\alpha\theta + (1-\alpha)]$$

(c) 在政府征税后，实际利率为 $(1-\tau)(B+g_P)$。消费增长改写为

$$g_C(t) = \frac{(1-\tau)[B + (\alpha-1)g_K(t)] - \rho}{\theta}$$

由 $g_C(t) = \alpha g_K(t)$ 可得

$$\alpha g_K(t) = \frac{(1-\tau)[B + (\alpha-1)g_K(t)] - \rho}{\theta}$$

$$\Rightarrow g_K(t) = \frac{(1-\tau)B - \rho}{\alpha\theta + (1-\tau)(1-\alpha)}$$

对 τ 求偏导可得

$$\frac{\partial g_C(t)}{\partial \tau} = -\alpha\frac{B\alpha\theta + (1-\alpha)\rho}{[\alpha\theta + (1-\alpha)(1-\tau)]^2} < 0$$

税率越高，消费均衡增长率越低。

4. **由教育导致的跨国收入差距**

(a) 资本的边际产出为

$$\partial Y/\partial K = \alpha K^{\alpha-1}(AL)^{1-\alpha} = \alpha(e^{\beta E}KL)^{1-\alpha}$$

(b) 资本的边际产出等于世界资本回报率

$$\alpha(e^{\beta E}KL)^{1-\alpha} = r^*$$

$$\Rightarrow K = (r^*/\alpha)^{\frac{1}{\alpha-1}}e^{\beta E}L$$

资本投入同样取决于教育程度。

(c) 生产函数取对数

$$lnY = (\alpha/(1-\alpha)ln(r^*/\alpha)) + lnL + \beta E$$

$$\partial lnY/\partial E = \beta$$

在 $\beta > 0$ 的情况下，教育程度越高，经济增长越快。

5. **RBC，利率对消费决策的影响**

(a) 由于利率是确定的，效用也是确定的

$$U = lnC_1 + lnC_2 = lnC_1 + ln((1+r)(Y_1 - C_1))$$

对 C_1 求偏导可得

$$\frac{\partial U}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1} - \frac{1}{Y_1 - C_1} = 0$$

$$\Rightarrow C1 = Y_1/2$$

消费决策不受利率 r 影响。

(b) 由于利率是不确定的，可表示为期望利率和期望误差的加总 $r = r^E + \varepsilon$，误差均值为零。期望效用可表示为

$$U = lnC_1 + E[lnC_2] = lnC_1 + E[ln((1 + r^E + \varepsilon)(Y_1 - C_1))]$$

对 C_1 求偏导可得

$$\frac{\partial U}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1} - E[\frac{1}{Y_1 - C_1}] = 0$$

$$\Rightarrow C1 = Y_1/2$$

经济个体消费决策不受不确定性影响。

(c) 面对可能随机的利率 $r = r^E + \varepsilon$，第二阶段的消费

$$C_2 = Y_2 - (1 + r^E + \varepsilon)C_1$$

期望效用可表示为

$$U = lnC_1 + E[lnC_2] = lnC_1 + E[ln(Y_2 - (1 + r^E + \varepsilon)C_1)]$$

对 C_1 求偏导可得

$$\frac{\partial U}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1} - E[\frac{1 + r^E + \varepsilon}{C_2}] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C1} = (1 + r^E)\frac{1}{E[C_2]} + Cov(1 + r^E + \varepsilon, \frac{1}{C_2})$$

在 r 确定的情况下，

$$\frac{1}{C1} = (1 + r)\frac{1}{C_2} = \frac{1 + r}{Y_2 - (1 + r)C_1}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{Y_2}{2(1 + r)}$$

(d) 如果 r 不确定

$$\frac{1}{C1} = (1 + r^E)\frac{1}{E[C_2]} + Cov(1 + r^E + \varepsilon, \frac{1}{C_2}) > (1 + r^E)\frac{1}{E[C_2]}$$

$$\Rightarrow C_1 < \frac{Y_2}{2(1 + r)}$$

面对不确定的利率，经济个体在第一阶段选择较低的消费水平。

6. **泰勒模型**

(a) $x_t = [(\phi m_t + (1-\phi)p_t) + (\phi E_t m_{t+1} + (1-\phi)E_t p_{t+1})]/2$

(b) 同步定价意味着 $P_t = P_{t+1} = x_t$，可得

$$x_t = [(\phi m_t + (1-\phi)x_t) + (\phi E_t m_{t+1} + (1-\phi)E_t x_{t+1})]/2$$

$$\Rightarrow x_t = (m_t + E_t m_{t+1})/2$$

厂商会把价格设定为本期价值和下期价值预期的均值。

(c) 根据需求曲线 $y_t = m_t - p_t$ 及 $p_t = x_t$ 可得

$$y_t = m_t - (m_t + E_t m_{t+1})/2$$

由于 m_t 符合随机游走，$E_t m_{t+1} = m_t$，可得

$$y_t = 0$$

对于 $t+1$ 期

$$y_{t+1} = m_{t+1} - (m_t + E_t m_{t+1})/2 = m_{t+1} - m_t$$

7. **生命周期储蓄理论**

(a) 终生消费不能超过终生收入

$$\int_{t=0}^{T} C(t)dt \leq \int_{t=0}^{T} Y(t)dt = \int_{t=0}^{R} (Y_0 + gt)dt$$

$$\Rightarrow \int_{t=0}^{T} C(t)dt \leq RY_0 + \frac{gR^2}{2}$$

(b) 由于利率为零，且无效用折现率，$u(C_t) = u(C_{t+1})$，因此效用最大化的消费路径为

$$C(t) = \bar{C} = \frac{1}{T}[RY_0 + \frac{gR^2}{2}]$$

(c) 经济个体在时间 t 的储蓄为

$$S(t) = Y(t) - C(t) = \begin{cases} Y_0 + gt - \bar{C}, & \text{if } 0 \leq t < R \\ -\bar{C}, & \text{if } R \leq t \leq T. \end{cases}$$

在时间 t 的财富为

$$W(t) = \int_{\tau=0}^{t} S(\tau)d\tau = \begin{cases} Y_0 t + \frac{gt^2}{2} - \bar{C}t, & \text{if } 0 \le t < R \\ (T-t)\bar{C}, & \text{if } R \le t \le T. \end{cases}$$

8. **投资决策**

(a) $L = Y^{1/(1-\alpha)} K^{-\alpha/(1-\alpha)}$

(b) 厂商利润为

$$\pi = PY - WL - rK = PY - W[Y^{1/(1-\alpha)} K^{-\alpha/(1-\alpha)}] - rK$$

(c) 一节条件

$$\partial \pi / \partial K = \frac{\alpha}{1-\alpha} W Y^{1/(1-\alpha)} K^{-1/(1-\alpha)} - r = 0$$

二阶条件

$$\partial^2 \pi / \partial K^2 = \frac{-\alpha}{(1-\alpha)^2} W Y^{1/(1-\alpha)} K^{(\alpha-2)/(1-\alpha)} < 0$$

根据一节条件可得

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} W Y^{1/(1-\alpha)} K^{-1/(1-\alpha)} = r$$

$$K = Y(\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{W}{r})^{1-\alpha}$$

9. **货币政策不可能三角**

一个国家不可能同时实现: (i) 资本的自由流动，(ii) 货币政策的独立性, (iii) 固定汇率。

保持资本自由流动和货币政策独立性：加拿大。

保持资本自由流动和固定汇率：沙特。

保持货币政策独立性和固定汇率：中国。

（其他实例也可。）

10. **财政政策的稳定性**

(a) $d(t)=D(t)/Y(t)$ 对时间求导

$$\dot{d}(t)=\frac{\dot{D}(t)Y(t)-D(t)\dot{Y}(t)}{Y(t)^2}=\frac{\delta(t)}{Y(t)}-\frac{D(t)g}{Y(t)}=a-gd(t)$$

(b) $\dot{d}(t)=a-gd(t)=0.7790/22-0.029*22/20=0.0035$，财政政策不稳定。

(c) 由$\dot{D}(t)=\delta(t)=aY(t)+r(d(t))D(t)$ 和 $\dot{Y}(t)=Y(t)g$，可得

$$\dot{d}(t)=\frac{\dot{D}(t)Y(t)-D(t)\dot{Y}(t)}{Y(t)^2}=a+\frac{r(d(t))D(t)}{Y(t)}-\frac{D(t)g}{Y(t)}$$

由 $d(t)=D(t)/Y(t)$ 可得

$$\dot{d}(t)=a+[r(d(t))-g]d(t)$$